交流電圧、電流の実効値とはなにか

芦川試験所　　小林武信

私たちの享受している現代生活は、電気なしでは考えられません。その電気は電力会社の配電網から供給されている家庭用 単相低圧100V、工場用 高圧3相6,600V等です。大きな工場では特別高圧3相66, 000Vで受電することもあります。 交流電圧は、時間軸で観測すると、きれいな正弦波形で表されますが、100Vとか、6,600Vというのは、交流波形のどの部分を指すのでしょうか。 実は、交流電圧100V、6,600V等は、”実効値”で表した交流電圧なのです。
交流電圧波形には、いろんな波形があます。純粋な正弦波形もあれば、正弦波にはほど遠いひずんだ波形、さらには、三角波形、矩形波形等があります。 直流、正弦波、三角波、歪み波、パルス波、さらには、交流が重畳した直流等を、同じ尺度で評価できるように、実効値という概念が生まれました。
同じ尺度とは何でしょうか、それは、異なる波形の電流を抵抗体に流して発熱させたとき、その発熱量が同じであれば、それらの異なる波形の実効値は相等しいと いいます。 もちろん、直流電流を流したときの発熱量を基準にします。
実効値10Aの交流電流と、直流電流10Aとを10Ωの抵抗体に流したとき、両者はそれぞれ1,000Wの電力を消費します。両者の消費電力が同じ事は、電流による発熱作用が同じ事を意味します。電圧についても全く同じです。

これらの関係を数式を使って考えてみましょう。
まず、I [A] の直流電流が、R[Ω]の抵抗に流れているとき、抵抗に消費される電力P_{dc} [W] は、

$$P_{dc} = I^2R \qquad [W] \qquad (1)$$

次ぎに、周波数　f [Hz] の交流電流　i [A] が、抵抗R[Ω] に流れたとき、抵抗に消費される電力P_{ac} は、

$$P_{ac} = i^2 R \qquad [W] \qquad (2)$$

交流電流 i は、その振幅を I_m とすると、

$$i = I_m \sin(\omega t) \qquad [A] \qquad (3)$$

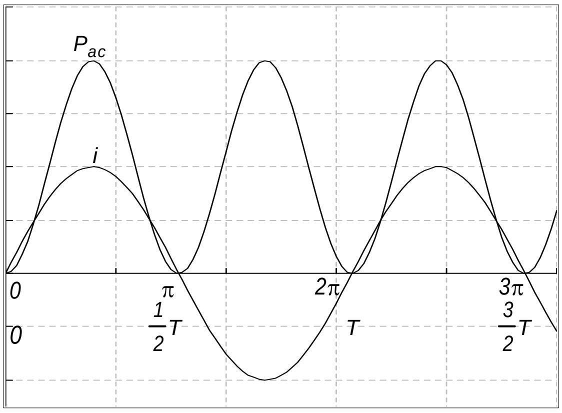
ここに、$\omega = 2\pi f$　、f : 周波数 (Hz)　、　t :時間(sec)

として表されます。 i は、交流電流の瞬時値と呼ばれています。
(2) 式と (3) 式とから、　$P_{ac} = i^2 R$

$$= \{I_m \sin(\omega t)\}^2 R \qquad [W] \qquad (4)$$

(3) 式の交流電流瞬時値、(4) 式の交流瞬時電力の関係を「図1」に示します。

「図1」のように、交流電流 i の1周期 T に対してP_{ac} は、2回の最大値を持ちます。 これは、交流電流は時間と共に正負方向変化するが、負方向電流も発熱作用に寄与していることを表します。電力として有効であることを意味します。



「図1」

P_{ac} 曲線を時間軸 0 からπ まで積分すると、時間軸の 0 と　π　との間の、曲線と時間軸に囲まれた部分の面積 S となります。このS をπ で割ると、該当区間のP_{ac} の平均値 P_{av} となります。 交流波形は、2π 、4π 、6π と同じ波形が継続しますので、P_{av} は、P_{ac}の平均値を一般化した、全時間に対する平均電力 P_{AV} と等しくなります。

すなわち、

$$P_{av} = \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi}\{I_m \sin(\omega t)\}^2 d(\omega) \qquad (5)$$

$$= \frac{R(I_m)^2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(\omega t)d(\omega t) \qquad (6)$$

$$= \frac{R(I_m)^2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}d(\omega t)\right\} \qquad (7)$$

$$= \frac{R(I_m)^2}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}d(\omega t) - \int_0^{\pi}\cos(2\omega t)d(\omega t)\right\} \qquad (8)$$

(8)式右辺の三角関数 cos(2ωt) の積分は次のようにします。

$$U = 2\omega t \qquad (9)$$

(9)式の両辺を微分すると、

$$\frac{d}{d(\omega t)}U = \frac{d}{d(\omega t)}2\omega t = 2 \qquad (10)$$

$$\therefore \quad d(\omega t) = \frac{dU}{2} \qquad (11)$$

(9)式、(11)式を(8)式右辺第2因子の中の第2積分項に適用します。

$$\int_0^{\pi}\cos(2\omega t)d(\omega t) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(U)dU \qquad (12)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin(U)\right)_0^{\pi} \qquad (13)$$

$$= 0 \qquad (14)$$

第2因子第1項の積分は

$$\int_0^{\pi}d(\omega t) = \left(\omega t\right)_0^{\pi} = \pi \qquad (15)$$

(14)式、(15)式を(8)式に代入すると、

$$P_{av} = \frac{R(I_m)^2}{2\pi}(\pi + 0)$$

$$= \frac{R\,(I_m)^2}{2} \qquad (16)$$

一方、交流回路に使った値と同じ抵抗値 R に直流電流 I [A] を流したとき、R の消費電力 P_{dc} は、

$$P_{dc} = R\,I^2 \qquad (17)$$

実効値の定義から、同一抵抗に、交流電流 i を流したときとの消費電力と直流電流 I Iを流したときの消費電力とが等しいその交流電流 $i[A]$ の実効値は $I[A]$ であるから、

$$P_{dc} = P_{AC} \qquad (18)$$

(!5)、(17) 式と (18) 式とから

$$I^2R = \frac{R(I_m)^2}{2}$$

$$I^2 = \frac{(I_m)^2}{2} \qquad (19)$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad (20)$$

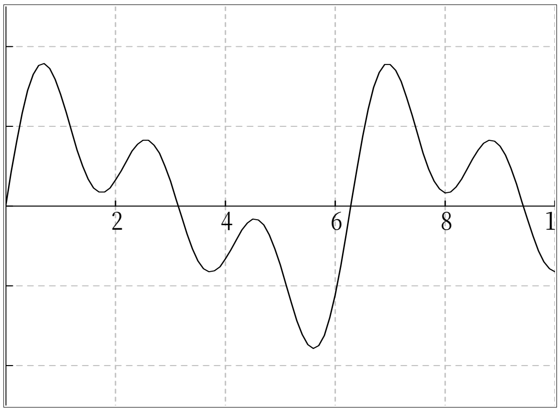
すなわち、最大値 I_m [A] の正弦波交流電流の実効値 I [A] は、(20) 式で表されます。

電圧の場合も同様に考えれば、最大値 V_m [V] の正弦波交流の実効値 V[V] は、

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \qquad (21)$$

(20) 式、(21) 式の実効値は、正弦波形の交流電圧、電流に適用出来る計算式です。

次ぎに、「図2」の歪み波形の場合を考えます。
歪み波形の場合は、歪み波をフーリエ級数に分解し、各周波数成分を求めます。



「図2」

各周波数成分の電圧の振幅を、$V_{m1}, V_{m2}, V_{m3}, V_{m4}, \cdots\cdots, V_{mn}$ とすると、各成分の実効値 $V_1, V_2, V_3, V_4, \cdots\cdots, V_n$ は、

$$V_1 = \frac{V_{m1}}{\sqrt{2}}, V_2 = \frac{V_{m2}}{\sqrt{2}}, V_3 = \frac{V_{m3}}{\sqrt{2}}, V_4 = \frac{V_{m4}}{\sqrt{2}}, \cdots\cdots, V_n = \frac{V_{mn}}{\sqrt{2}} \qquad (22)$$

となります。

歪み波電圧 $v(t)$ はフーリエ級数に分解すると、各周波数成分は前述のようになりますが、歪み波としての実効値 V は次のようになります。

$$V = \sqrt{(V_1)^2 + (V_2)^2 + (V_3)^2 + (V_4)^2 + \cdots\cdots + (V_n)^2} \qquad (23)$$

「図2」の歪み波電圧は、次式のように、基本波、第2高調波、第3高調波から成っています。

$$v = 2\sin(\omega t) + \sin(2\omega t) + 1.5\sin(3\omega t) \qquad (24)$$

この歪み波の実効値 V は、

$$V = \sqrt{\frac{2^2}{2} + \frac{1^2}{2} + \frac{1.5^2}{2}}$$

$$= \sqrt{2 + 0.5 + 1.125} = 1.9039 \quad [V] \qquad (25)$$

(24) 式の歪み波は1.9039[V]の直流電圧と同じエネルギー効果を持つ、すなわち実効値1.9039[V] となります。

参考資料　　電気回路理論　　末崎輝雄　他著　　　コロナ社